NWABUEZE PRECIOUS AKUNNA

18/sci01/055

MAT 205

1. Define a vector space

A vector space over a real field F is a set that is closed under finite vector addition and scalar multiplication.

2. Show that the vectors A =(1, 1, 1) , B =(1, 2, 3), C =(1, 5, 8) spans Rᵌ .

                                        Solution

                                   αA + βB + δC

α      1​+ β      1         +​δ      1                      a

       1                      2                      5          =          b

       1                      3                      8                      c

    α + β + δ = a      – (1)

    α  + 2β + 5δ = b     – (2)

    α  + 3β + 8δ = c     –  (3)

from eqn  (1)

α = a -  β  - δ       – (4)

put (4)  in (2) and (3)

α  + 2β + 5δ = b

(a -  β  - δ) + 2β + 5δ = b

a -  β  - δ + 2β + 5δ = b

a + β + 4δ = b - a     –(5)

α  + 3β + 8δ = c

(a -  β  - δ)  + 3β + 8δ = c

a -  β  - δ + 3β + 8δ = c

a + 2β + 7δ = c - a      –(6)

combine equation (5) and (6)

       β + 4δ = b - a     – (5)

  -

       2β + 7δ = c - a      – (6)

   Multiply equation (5) by 2 and equation (6) by 1

=    2β + 8δ = 2b – 2a

   - 2β + 7δ = c – a

   ​δ   = (2b – 2a) – (c – a)

       δ = 2b – 2a – c + a

       δ = 2b – a – c

       δ = -a + 2b – c

From equation (5)

β + 4δ = b - a

Substitute the value of δ

= β + 4( -a + 2b –c) = b – a

  β - 4a + 8b –4c = b – a

 β = 4a - 8b + 4c = b – a

 β = 3a - 7b + 4c

From equation (4)

α = a - β - δ

α = a - (3a - 7b + 4c) - (-a + 2b – c)

α = a - 3a + 7b - 4c +a - 2b + c

   = -a + 5b -3c

3. Are the vectors A = (1, 2, 3), Q = (3, 2, 1), R = (0, 0, 1) a basis for Rᵌ?

                                 Solution

First check for linear dependency

                                αP + βQ + δR

α      1​+ β      3         +​δ      0                      0

       2                      2                      0          =          0

      3                      1                      1                      0

    α + 3β = 0      – (1)

    2α + 2β = 0     – (2)

    3α + β + δ = 0     – (3)

From eqn  (1)

α + β = 0

Substitute eqn (1) in (2) and (3)

 2α + 2β = 0

 2(-3β) + 2β = 0

 -6β + 2β = 0

     -4β = 0

      β = 0

Substitute values of β into (2)

α + 3β = 0

α + 0 = 0

α = 0

Substitute α and β into equation (3)

3α + β + δ = 0

3(0) + 0 + δ = 0

δ = 0

    α + 3β = p      – (1)

    2α + 2β = q     – (2)

    3α + β + δ = r     – (3)

Combine equations (1) and (2)

     α + 3β     = p     x1



    2α + 2β      = q   x2

Multiply equations (1) by 2 and (2) by 1

    2α + 6β = 2p

  - 2α + 2β = q

​4β = 2p – q

​ 4​4

              β = 2p – q

​ ​4

   Substitute value of β into (1)

  α + 3β = p

 α + 3 2p – q    = p

               4

​

 α +      6p –3q     = p

                 4

 α =         p     -    6p –3q

                1              4

​

α = 4p – (6p – 3q)

                4

α = 4p – 6p + 3q

                4

α = –2p + 3q

             4

In equation (2)

3α + β + δ = r

δ = r - 3α – β

δ = r   - 3  -2p + 3q      -    2p – q

     1                4                      4

δ = 4r – 3 (-2p + 3q) – (2p – q)

​       4

δ = 4r + 6p - 9q – 2p + q

​       4

δ  = 4r + 4p - 8q

​       4

δ = 4p - 8q + 4r

​       4